CURS 3 - 4

4. CONSTRUCŢIA ŞI CALCULUL SISTEMELOR DE TRANSMITERE PLANETARE

În multe din construcţiile mecatronice se utilizează, în componenţa sistemului mecanic, ***transmisii planetare*** (cu roţi dinţate cu axe mobile) pentru obţinerea mişcării de rotaţie a elementului condus, datorită următoarelor *avantaje*:

– pot transmite puteri într-o gamă largă, de la ordinul câtorva W până la 10^4 kW;

– permit transmiterea mişcării între arbori cu orice poziţie relativă unghiulară;

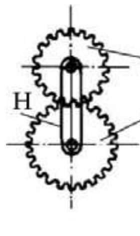
– pot realiza rapoarte de transmitere de la valori foarte mici la valori de ordinul 10.000;

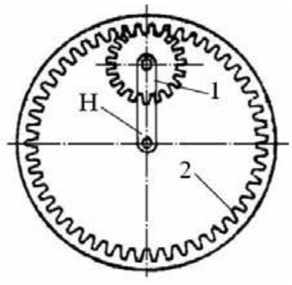
– au construcţie compactă (gabarit redus).

Transmisiile planetare sunt folosite frecvent ca reductoare şi mai rar ca amplificatoare de turaţie.

4.1. Structura transmisiilor planetare

Cea mai simplă transmisie planetară cu roţi dinţate, cu angrenare exterioară sau interioară, reprezentată în figura 4.1 a şi b, are lanţul cinematic format din două ***roţi dinţate*** *1*, *2* şi un ***element suport axe*** *H*.

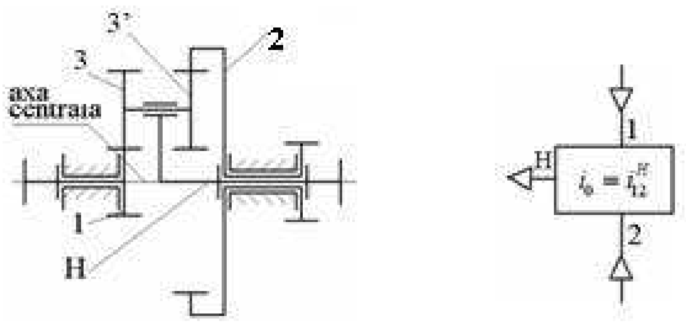




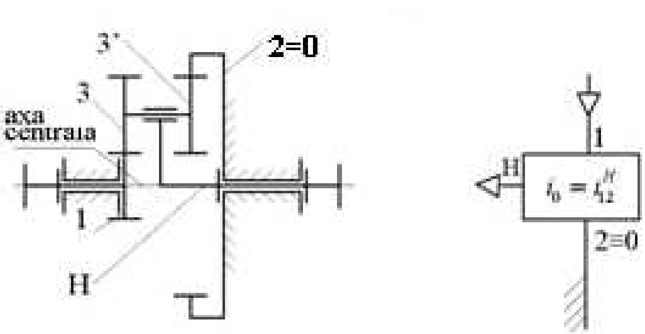
a) ***b)***

Fig. 4.1 *Obţinerea transmisiei planetare:*
a) exterioară, b) interioară

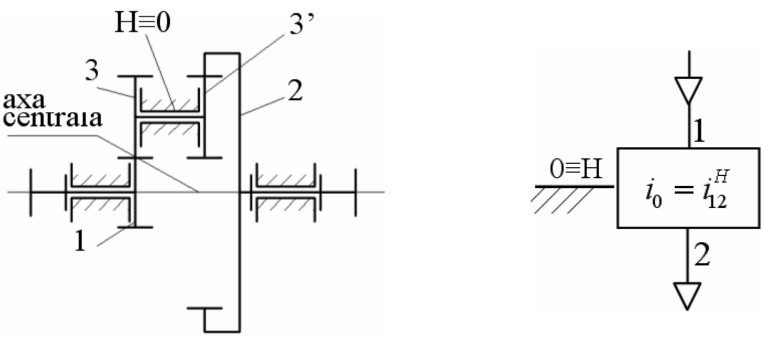
Prin legarea a două sau mai multe angrenaje folosind un singur element suport axe se obţin ***transmisii planetare simple*** cu roţi dinţate reprezentate în schemele structural-constructive din figura 4.2.



a)



b)



c)

Fig. 4.2 *Transmisii planetare simple:*
a) diferenţială, b) monomobilă, c) cu axe fixe

În general, o transmisie planetară cu roţi dinţate are:
– o axă de rotaţie fixă numită *axă centrală*;
– *elemente centrale 1*, *2*, *H* ale căror axe de rotaţie coincid cu axa centrală;
– *sateliţi* (roţi cu axe mobile): elementele *3*, *3'*.

Din acest motiv transmisiile planetare sunt transmisii cu roţi dinţate cu axe mobile la care roţile centrale şi braţul port–satelit se rotesc coaxial (de unde provine denumirea "planetară" datorită analogiei dintre mişcarea relativă a roţilor şi mişcarea planetelor).

O transmisie planetară simplă (cu una sau două roţi centrale) se numeşte ***unitate planetară,*** în componenţa căreia intră:

1 – element constructiv de intrare (conducător);
2 – element constructiv de ieşire (condus) care sunt elemente centrale;
3, *3'* – elemente constructive cu axe mobile (sateliţi);
H – element constructiv suport axe (braţ port-satelit);
0 – element constructiv bază (fix).

Funcţie de elementul bază există următoarele *tipuri constructive*:

a) transmisia planetară simplă diferenţială: la care numai axa centrală este bază şi are două elemente conducătoare (rezultă din calculul gradului de mobilitate pentru mecanismele plane):

$$M = 3 \cdot n - 2 \cdot c_5 - c_4 \qquad (4.1)$$

în care: n – numărul elementelor mobile (*1*; *3–3'*; *2*; *H*) = 4;
c_5 – numărul cuplelor de clasa V (cu un grad de libertate): rotaţie (*1–0*; *3–3'–H*; *H–2; 2–0*) = 4;
c_4 – numărul cuplelor de clasa IV (cu două grade de libertate): angrenare (*1–2*; *3'–2*) = 2;
Înlocuind valorile stabilite rezultă: $M = 2$ (transmisie bimobilă).

b) transmisia planetară simplă monomobilă : se obţine prin legarea la bază a unuia din elementele centrale (2 ≡ 0) rezultând o transmisie cu un singur element conducător ($M = 1$) deoarece:

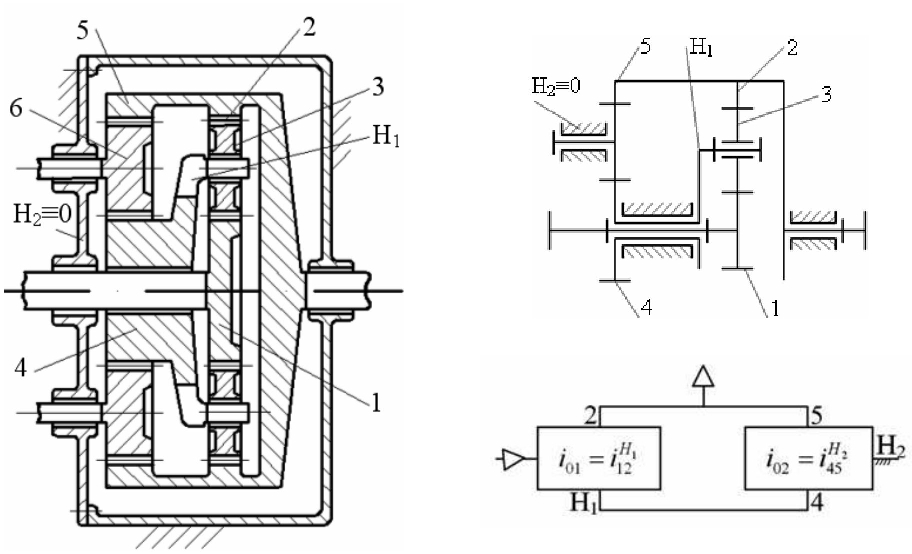
$n = 3$ (*1*; *3–3'*; *H*);
$c_5 = 3$ (*1–0*; *3–3'–H*; *H–0*);
$c_4 = 2$ (*1–3*; *3'–2*).

c) ***transmisia cu roţi dinţate cu axe fixe***: obţinută prin legarea la bază a elementului suport axe (H ≡ 0) şi care are un singur element conducător ($M = 1$):

$n = 3$ (1; 3–$3'$; 2);
$c_5 = 3$ (1–0; 3–$3'$–0; 2–0);
$c_4 = 2$ (1–3; $3'$–2).

Fiecare unitate planetară poate fi reprezentată simplificat prin schemele bloc din dreapta fiecărei poziţii din figura 4.2 (a, b, c) prin care se evidenţiază elementele conducătoare, conduse şi raportul de transmitere specific tipului constructiv de transmisie planetară.

Prin legarea a două sau mai multe unităţi planetare diferenţiale, astfel ca fiecare unitate să aibă câte două legături, se obţine o ***transmisie diferenţială complexă*** cu $M = 2$, care prin legarea la bază a unui element central se transformă într-o ***transmisie planetară monomobilă complexă*** ca în figura 4.3.



a) ***b)***

Fig. 4.3 *Transmisie planetară monomobilă complexă*

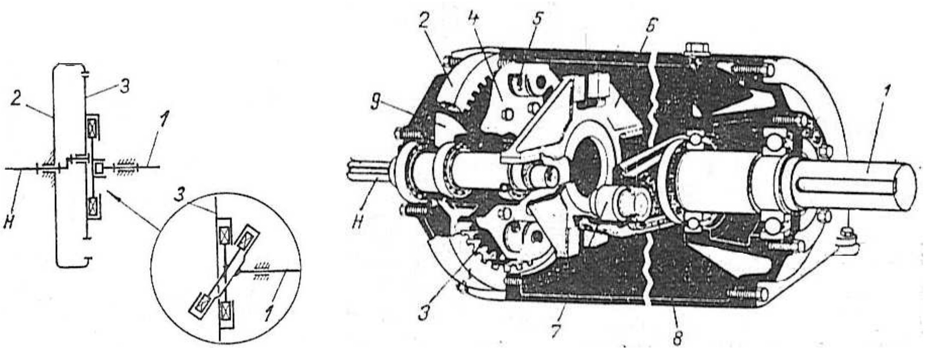
4.2. Utilizarea transmisiilor planetare în construcţiile mecatronice

Variantele constructive de transmisii planetare cu roţi dinţate pot fi grupate în două categorii:

- ***transmisii planetare simple***:
  - *cu o roata centrală 1* cu angrenare interioară prin satelitul *3* fixat pe braţul port–satelit *H* şi *roata centrală 2* care poate fi:
    - *fixă*
      - transmisia plană Strateline (simplă sau complexă) ca în fgura 4.4;
      - transmisia Ferguson: cu doi sateliţi, figura 4.5;
      - transmisia sferică: folosind un cuplaj mobil unghiular, figura 4.6;
    - *mobilă*:
      - transmisia planetară sferică (industria chimică, instalaţii de vid);
  - *cu două roţi centrale*
    - *cu sateliţi simpli*:
      - transmisia Stoeckicht, figura 4.7;
      - transmisia Renk (la construcţii navale, centrale electrice) ca în figura 4.8;
    - *cu sateliţi dubli*: în construcţie modulară:
      - transmisia Redex (transmisii prin curele şi lanturi, variatoare planetare, standuri de încercare, maşini-unelte), figura 4.9;
      - transmisia Flender, figura 4.10;
    - *cu sateliţi dubli înseriaţi*: ca reductoare cu rapoarte de transmitere mari:
      - transmisia Sevenier din figura 4.11;

- ***transmisii planetare complexe***:
  - cu *legarea în serie a unităţilor planetare*:
    - transmisia Lohmann (excavatoare, macarale), figura 4.12;
    - transmisia Engel cu sateliţi legaţi în paralel;
  - cu *legarea în paralel a unităţilor planetare*:
    - transmisia Lohmann (acţionarea hidraulică a roţilor unui autovehicul sau a tamburului unui troliu), figura 4.13.

Transmisia planetară cu roata centrală fixă din figura 4.4 are elementul suport axe *H* ca element de intrare realizat dintr-un arbore cu excentric, roata centrală *2* fixă, iar satelitul *3* legat la arborele de ieşire *1* printr-n cuplaj Green (semicuplajul *4* solidar cu satelitul *3*, bolţurile cu role *5* şi *7*, placa intermediară *6*, braţul *8* solidar cu arborele de ieşire *1*). Cuplajul folosit este de tip Oldham cu care se obţine reducerea frecării prin utilizarea rolelor, iar echilibrarea transmisiei planetare se face cu ajutorul contragreutăţii *9*.



Cuplaj Oldham

Fig. 4.4 *Transmisia Strateline*

Această variantă constructivă asigură rapoarte de transmitere $i = 2 - 152$, valorile mari fiind însoţite de randament scăzut ($\eta = 0.565$).

La *transmisia planetară Ferguson* (figura 4.5) echlibrarea se realizează cu doi sateliţi diametral opuşi, iar legatura dintre aceştia şi arborele central de ieşire se face printr-un cuplaj cu bolţuri şi role.

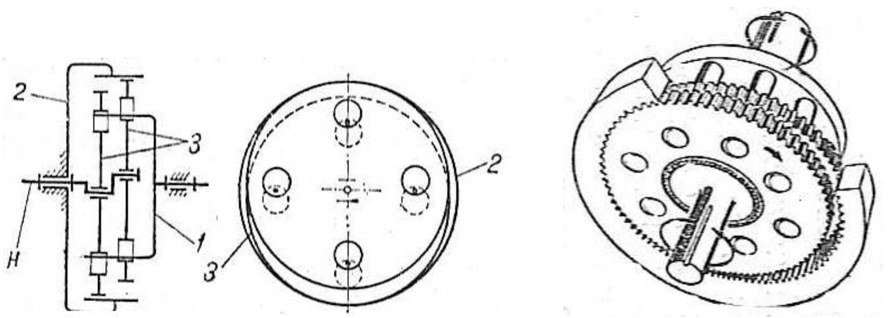
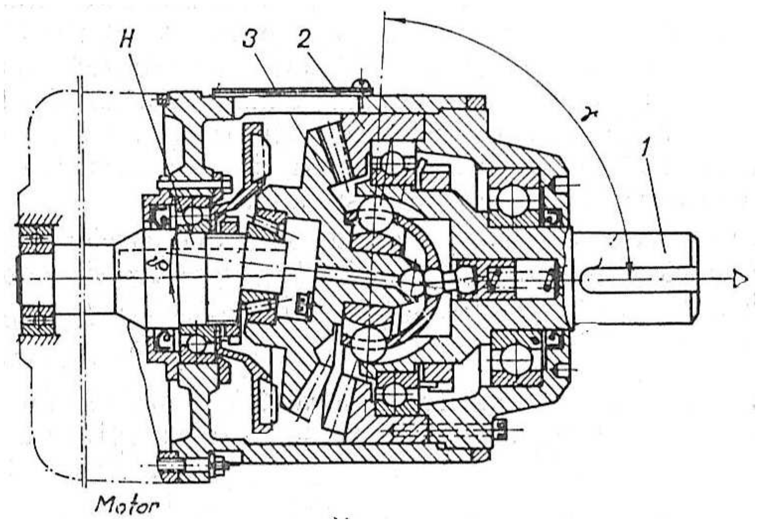
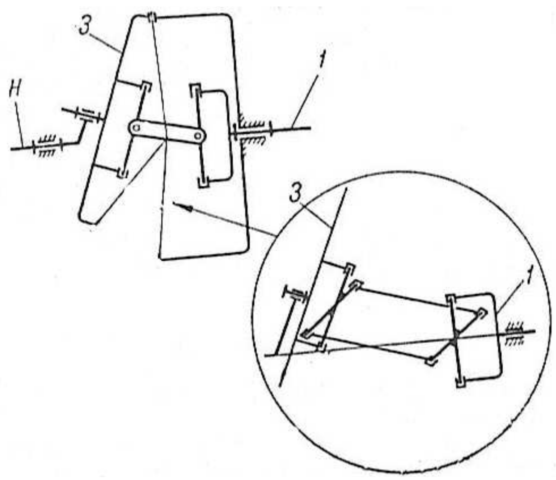


Fig. 4.5 *Transmisia Ferguson*

Două exemple de *transmisii planetare sferice* cu roată centrală fixă sunt ilustrate în figura 4.6 pentru cazul unui motoreductor în care legatura dintre satelitul *3* şi arborele central de ieşire *1* se realizează cu ajutorul unui cuplaj mobil unghiular: a) de tip Rzeppa; b) bicardanic.



a)



b)

Fig. 4.6 *Transmisia planetară sferică:*
a) tip Rzeppa, b) bicardanică

Transmisii planetare cu două roţi centrale au în construcţie sateliţi simpli (varianta constructivă cea mai utilizată), dubli sau dubli înseriaţi. Reducerea gabaritului transmisiei şi creşterea capacitaţii portante se face prin legarea sateliţilor în paralel.

Transmisiile planetare de dimensiuni mici nu au sisteme de egalizare a încărcării sateliţilor sau folosesc sisteme simple (cu elemente care au elasticitate mărită sau eliminând cuplele de rotaţie ale unor arbori centrali).

La transmisiile planetare de dimensiuni şi puteri mari, pentru realizarea unei precizii ridicate, este necesară egalizarea încărcării sateliţilor montaţi în paralel folosind roţi cu dantura înclinată, la care preluarea sarcinilor axiale se asigură prin utilizarea unor roţi duble (figurile 4.7 şi 4.8) cu dantura în V care contribuie şi la descărcarea lagărelor.

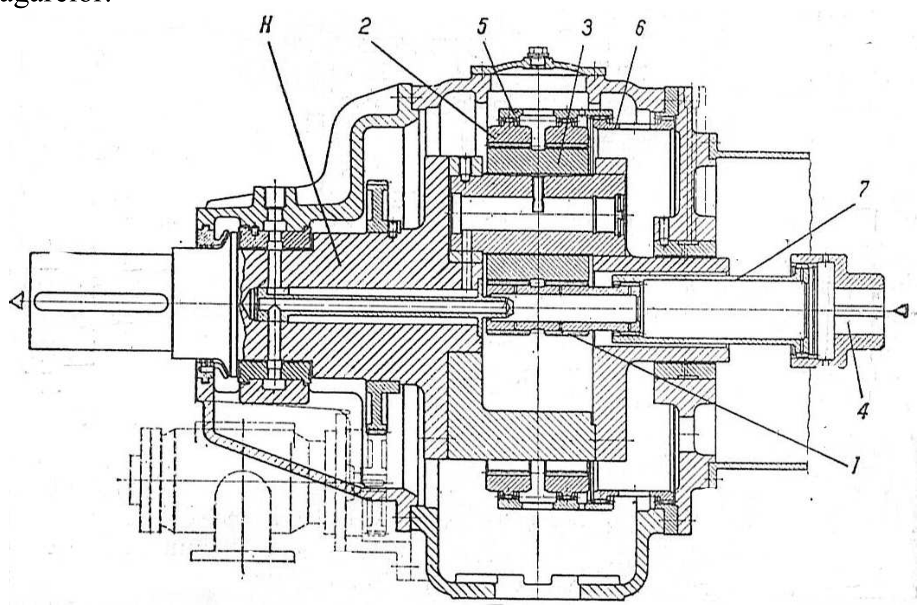
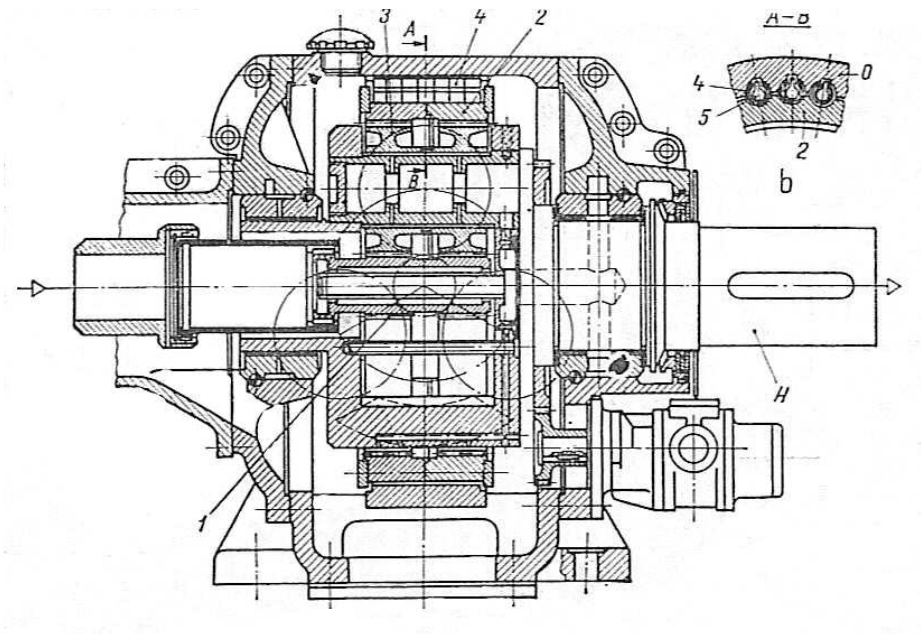


Fig. 4.*7 Transmisia Stoeckicht*

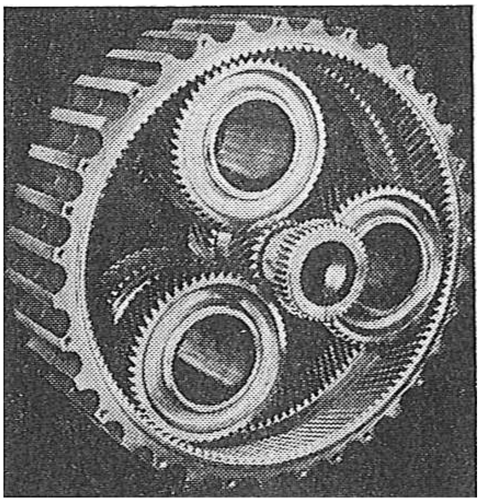
Cele două tipuri constructive de transmisii planetare folosesc soluţii combinate de egalizare a încărcării sateliţilor.

La *transmisia Stoeckicht* ridicarea nedeterminării în plan se face prin eliminarea cuplei de rotaţie a roţii centrale *1*, realizarea celor două roţi centrale *1* şi în special *2* cu elasticitate mărită în direcţie radială şi tangenţială, iar roţile centrale şi cele satelit sunt montate flotant după

direcţia axială (pentru compensarea impreciziilor tehnologice) prin intermediul manşoanelor dinţate *5* şi *6*.



a)



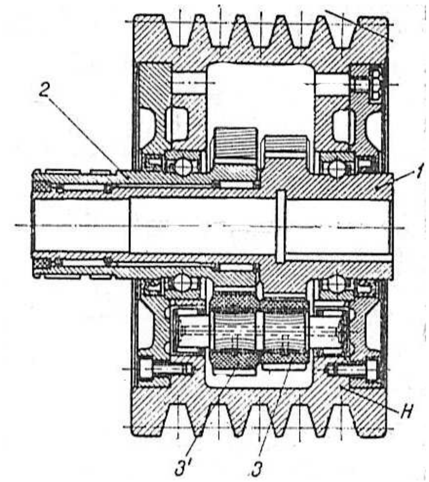
b)

Fig. 4.8 *Transmisia Renk*

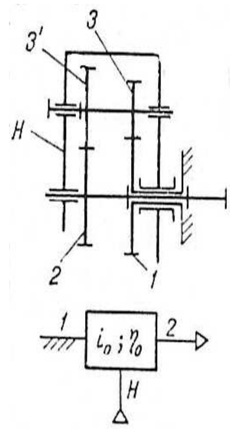
În cazul transmisiei Renk, sistemul de egalizare a încărcării sateliţilor este similar cu deosebirea că cele două coroane cu dantura interioară sunt legate elastic la bază prin pachetele de arcuri *4*, ghidate prin bolţurile cu nas *5* (vezi figura 4.8 b).

Aceste tipuri constructive de transmisii planetare au randamente foarte bune ($\eta = 0.97 - 0.99$).

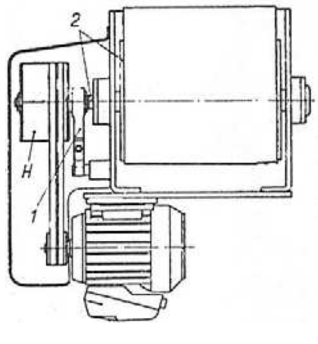
Din categoria *transmisii*lor *cu sateliţi dubli*, de putere mică şi medie, sunt prezentete două soluţii constructive: *transmisia planetară Redex* (figura 4.9) este adoptată ca soluţie constructivă pentru realizarea unei game largi de transmisii mecanice (prin curele şi lanţuri, variatoare planetare, maşini-unelte, standuri de încercare); *transmisia planetară Flender* (figura 4.10).



a)



b)



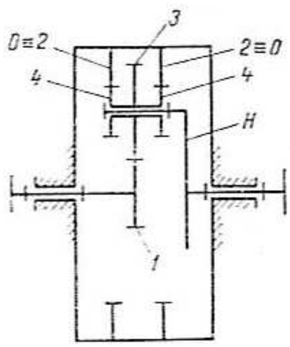
c)

Fig. 4.9 *Transmisia Redex*

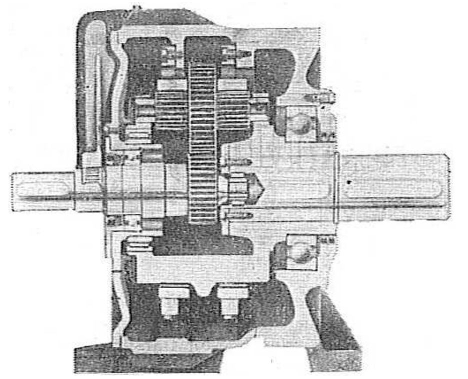
În roata de curea din figura 4.9 a, transmisia Redex funcţionează ca transmisie planetară monomobilă prin legarea la bază a arborelui *1* sau *2*. Similar în transmisia de acţionare a unei benzi transportoare (figura 4.9 b şi c) transmisia Redex funcţioneză ca transmisie planetară cu arborele *1* fix.

Valorile pentru randament sunt mai mici în cazul funcţionării ca transmisie planetară monomobilă, iar limitarea supraîncărcării sateliţilor montaţi în paralel se asigură prin montarea elastică a acestora pe bolţuri.

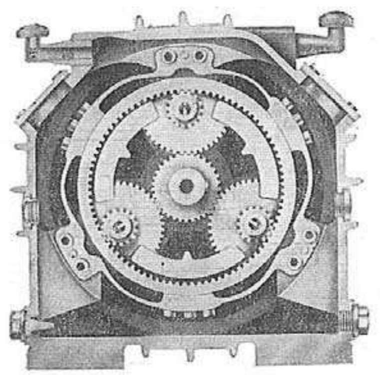
Transmisiiile planetare Flender (figura 4.10) sunt transmisii complexe obţinute prin combinarea diverselor module, cu rapoarte de transmitere $i \leq 900$, la care egalizarea încărcării sateliţilor se obţine pe baza deformaţiilor elastice ale celor două coroane dinţate *2* şi a celor două elemente elastice care le leagă la bază.



a)



b)

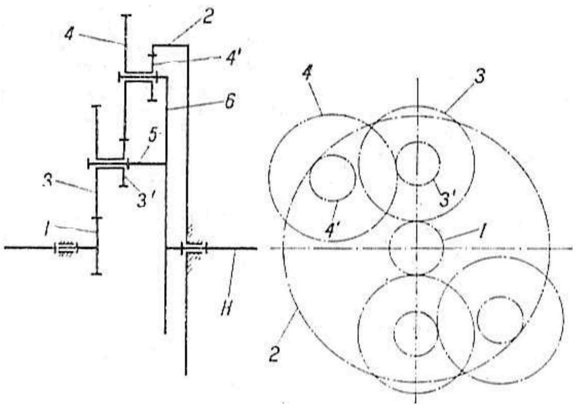


c)

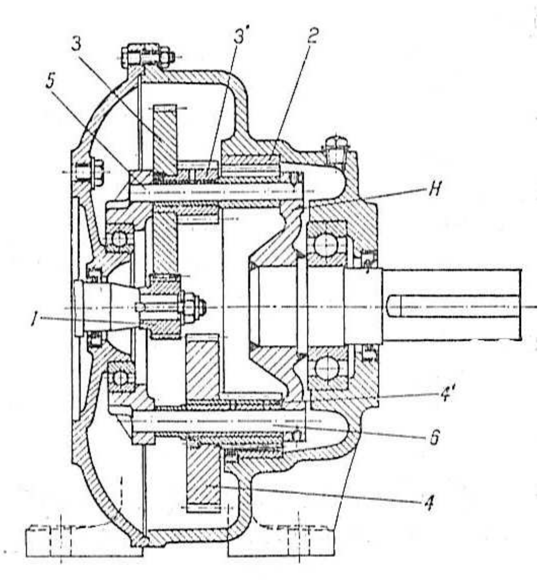
Fig. 4.10 *Transmisia Flender*

Cu *transmisii planetare* ***Sevenier*** având sateliţi dubli înseriaţi, legaţi în paralel ca în figura 4.11, se pot realiza rapoarte de transmitere $i = 1 - 31$ (181) şi randamente bune ($\eta = 0{,}95$).

Limitarea neuniformităţilor de încărcare a sateliţilor se face prin cuplarea (cu bolţ elastic sau printr-o bară de torsiune) a celor doi sateliţi simpli care formează un satelit dublu.



a)



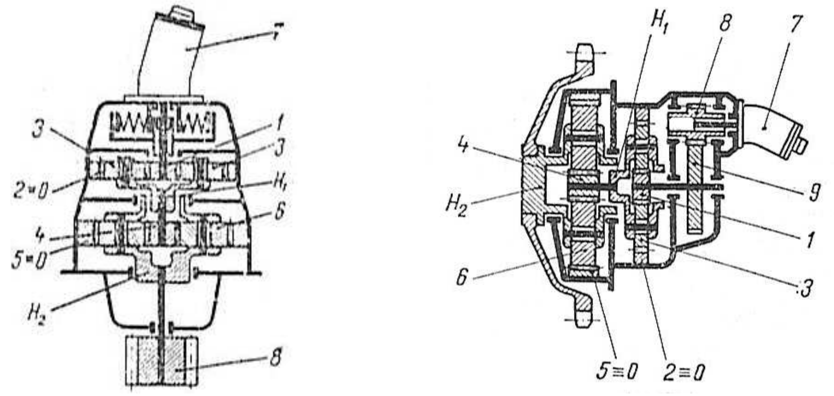
b)

Fig. 4.11 *Transmisia Sevenier*

Din categoria *transmisii planetare complexe* obţinute prin înserierea unităţilor planetare fac parte:

– *transmisia Lohmann* (figura 4.12 a), antrenată hidraulic de motorul *7* şi având ieşirea la roata *8*, s-a obţinut prin înserierea unităţilor planetare monomobile $1-2-H_1$ şi $H_1 \equiv 4-5-H_2$. Această variantă constructivă este utilizată pentru rotirea platformei mobile din construcţia excavatoarelor şi a macaralelor;

– *transmisia Lohmann* din figura 4.12 b se deosebeşte de varianta constructivă anterioară prin faptul că are la intrare, înseriat, un angrenaj cu axe fixe *8 - 9*, realizând astfel rapoarte de transmitere $i=$ 90 – 250 şi serveşte ca reductor final în transmisiile autovehiculelor pe şenile.

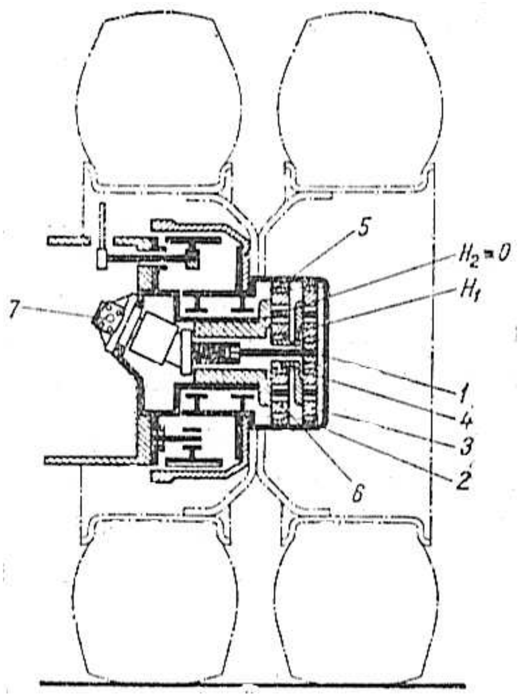


a) ***b)***

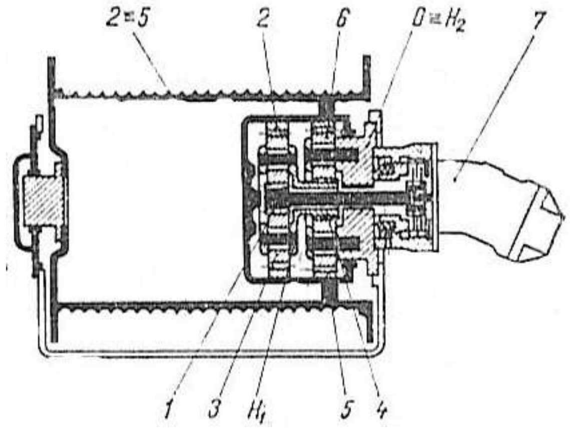
Fig. 4.12 *Transmisii Lohmann*

Alte variante constructive sunt *transmisiile planetare Engel*, ca transmisii de putere mică, care se construiesc prin modulare în 2 –.7 trepte, obţinând rapoarte de transmitere $i=$ 30 – 54880 şi randamente $\eta=$ 0,8 – 0,4.

În practică, în afară de metoda înserierii sateliţilor, sunt utilizate diferite tipuri de legături în paralel: la acţionarea hidraulică a roţilor unui autovehicul (figura 4.13 a) sau a tamburului unui troliu (figura 4.13 b) se folosesc transmisii planetare Lohmann cu două unităţi planetare legate în paralel $2 \equiv 5$ şi $H_1 \equiv 4$.



a)



b)

Fig. 4.13 *Transmisii Lohmann cu două unităţi planetare legate în parallel*

O aplicaţie importantă în construcţia sistemelor mecatronice o constituie ***diferenţialul automobilului*** (figura 4.14) ce reprezintă un sistem de transmisie cu angrenaje planetare care asigură o deplasare independentă a roţilor motoare, necesară în curbe, la patinare pe teren alunecos sau când anvelopele au diametre diferite (uzate, inegal umflate, etc).

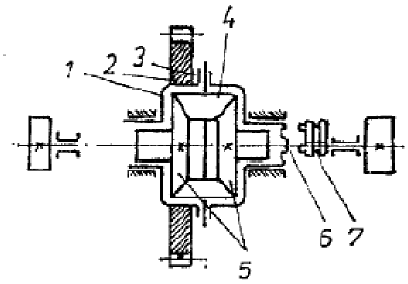


Fig. 4.14 *Schema cinematică a diferenţialul automobilului*

Din punct de vedere constructiv, diferenţialul automobilului este alcătuit din caseta *1*, coroana *2*, roţile dinţate conice satelite *4* montate pe axul *3* şi roţile dinţate conice planetare *5*. De la caseta diferenţialului mişcarea este transmisă, prin intermediul arborelui *3,* roţilor satelite *4* care, fiind montate liber pe ax, vor apăsa în mod egal asupra ambelor roţi planetare *5*, împărţind astfel simetric momentul motor.

Când roţile satelite nu se rotesc în jurul axului propriu, cele două roţi planetare se rotesc cu aceeaşi viteză ca şi caseta diferenţialului.

Când roţile se rotesc în jurul axului propriu, una din roţile planetare se va roti mai încet, iar a doua mai repede decât caseta diferenţialului. Astfel este posibil ca una din roţile planetare să stea pe loc, iar cealaltă să se rotească cu o viteză de două ori mai mare decât caseta (apare în exploatare când roata corespunzătoare a utilajului patinează pe noroi, zăpadă sau gheaţă). Pentru a face posibilă înaintarea utilajului şi în acest caz, diferenţialul este prevăzut cu un dispozitiv de blocare, format din cuplajul cu gheare *7* care se poate deplasa pe canelurile axului planetar *6*. Prin această deplasare până la caseta diferenţialului se realizează o legătură rigidă între casetă şi axul planetar *6*, astfel încât cele două roţi planetare se vor roti cu aceeaşi viteză, egală cu cea a casetei diferenţialului.

În transmisia finală la roţi s-a introdus, mai nou, încă un reductor planetar în butucul roţii, astfel încât raportul total de transmitere ajunge la valori mai mari ($i = 25$).

Pentru îmbunătăţirea tracţiunii pe terenurile cu aderenţă redusă, la unele utilaje de geniu moderne diferenţialul clasic a fost înlocuit, la una din axe, cu un diferenţial cu blocare de construcţie specială, denumit "*no spin*". Acesta este un dispozitiv cu comandă automată, care blochează axele planetare pe drum drept şi le deblochează la viraje. În locul pinioanelor satelite şi planetare se montează în caseta diferenţialului două mici ambreiaje cu gheare care, la deplasarea drept înainte, solidarizează axele, iar la viraje decuplează automat ambreiajul corespunzător roţii exterioare curbei. Avantajele acestui diferenţial rezultă din figura 4.15 care redau schemele de lucru.

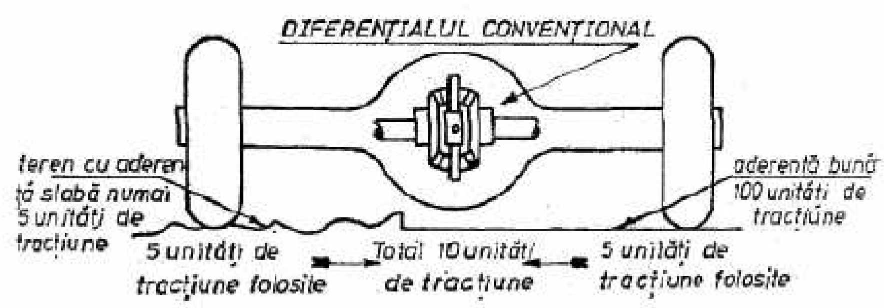


Fig. 4.15 *Schema de lucru a transmisiei diferenţialului*

Când o roată se deplasează pe un teren cu aderenţă slabă, pe care se pot folosi numai 5 unităţi de tracţiune, cealaltă roată poate să dezvolte tot numai 5 unităţi (în cazul diferenţialului clasic) deşi se deplasează pe un teren cu aderenta bună de 100 unităţi. În cazul diferenţialului cu blocare *"no spin"* roata respectivă poate să asigure folosirea integrală a celor 100 de unităţi de tracţiune. Astfel, în total pe axa respectivă, diferenţialul cu blocare "*no spin"* asigură o tracţiune de 10 ori mai bună decât diferenţialul clasic, folosind 105 unităţi de tracţiune faţă de 10.

Diferenţialul "*no spin"* se montează, în general, pe axele mai încarcate ale utilajelor de geniu, pentru a mări forţa de pătrundere (în faţă la buldozere şi în spate la încărcătoare).

4.3. Cinematica transmisiilor planetare

Din punct de vedere cinematic gradul de mobilitate *M* reprezintă numărul mişcărilor, independente şi cunoscute, care impuse transmisiei asigură mişcări determinate tuturor elementelor acesteia.

Din punct de vedere static mobilitatea *M* reprezintă numărul momentelor exterioare care acţionează asupra arborilor de intrare şi ieşire, ale căror mărimi pot fi determinate prin rezolvarea sistemului de ecuaţii de echilibu cinetostatic al transmisiei planetare.

Mişcările elementelor constructive ale unei transmisii planetare sunt univoc determinate dacă se cunosc mişcările a *M* arbori exteriori (*M* = 2 la transmisiile planetare simple diferenţiale şi *M* = 1 la transmisiile planetare simple monomobile).

Mişcarea unui arbore exterior oarecare *k* este descrisă, în funcţie de cele *M* mişcări cunoscute, cu ajutorul unei funcţii numită *lege de transmitere,* definită de relaţia:

$$\varphi_k = \varphi(\varphi_j) \qquad j = \overline{1, M} \tag{4.2}$$

care prin derivare în raport cu timpul poate fi scrisă sub forma:

$$\omega_k = \omega(\omega_j) \qquad j = \overline{1, M} \tag{4.3}$$

unde: φ_k – unghiul de rotaţie a arborelui k;

φ_j – unghiul de rotaţie a arborelui exterior j;

ω_k – viteza unghiulară a arborelui k;

ω_j – viteza unghiulară a arborelui exterior j.

În cazul transmisiilor cu roţi dinţate cu doi arbori exteriori (*1*– arbore de intrare şi *n* – arbore de ieşire) legea de transmitere se poate scrie sub forma unui raport numit *raport de transmitere*:

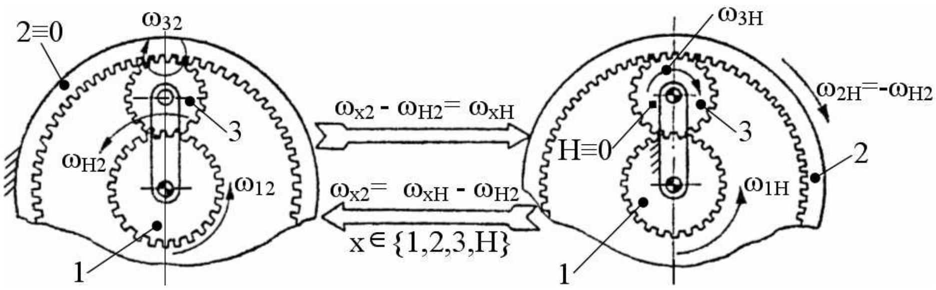
$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \pm a \tag{4.4}$$

în care semnul + se consideră când vitezele unghiulare au acelaşi sens, iar semnul – când au sensuri contrare.

Studiul cinematicii unei transmisii planetare constă în determinarea vitezelor unghiulare pentru fiecare element mobil şi stabilirea raportului de transmitere.

4.3.1. Cinematica transmisiei planetare simplă monomobilă

Se impune mărimea şi sensul vitezei unghiulară ω_{12} considerând roata centrală *1* ***element conducător***, roata *2* ***fixată*** la elementul bază şi braţul port-satelit *H* ***element condus***. După analiza cinematică, rezultă sensurile vitezelor unghiulare ω_{32} şi ω_{H2} pentru unitatea planetară considerată, ca în figura 4.16 a.



a) ***b)***

Fig. 4.16 *Vitezele unghiulare relative între elementele constructive:*
a) transmisia planetară monomobilă, b) transmisia cu axe fixe asociată

Prin inversarea mişcării unei transmisii planetare simple monomobile în raport cu elementul suport axe *H* se obţine o transmisie cu roţi dinţate cu axe fixe (figura 4.16 b), când se spune că transmisiei planetare i se asociază, prin inversarea mişcării, transmisia cu axe fixe.

Inversarea mişcării se obţine aplicând întregului sistem (fiecărui element constructiv) o mişcare egală şi de sens contrar mişcării elementului central (ex.: elementul suport axe *H*) ceea ce conduce la formularea teoremei că la schimbarea elementului bază (*H* ≡ *0*) şi a mişcărilor absolute, mişcările relative ale elementelor corespunzătoare celor două transmisii rămân neschimbate.

Deoarece ω_{1H} şi ω_{12} sunt egale ca mărime, direcţie şi sens, se obţin vitezele unghiulare ω_{3H} şi ω_{2H} pentru transmisia cu roţi dinţate cu axe fixe asociată transmisiei planetare, ca în figura 4.16 b.

Ştiind că: $\omega_{2H} = -\omega_{H2}$, prin inversarea mişcării unei transmisii planetare monomobile în raport cu elementul suport axe *H* se obţine o

transmisie cu roţi dinţate cu axe fixe; cele două *transmisii* se numesc *asociate* şi sunt echivalente din punct de vedere cinematic.

Pentru două elemente oarecare *x* şi *y*, componente ale fiecarui tip constructiv de transmisie (planetară, respectiv cu axe fixe) se pot scrie relaţii între vitezele unghiulare ale mişcării lor relative exprimate prin:

$$\omega_{xy} = \omega_{x2} - \omega_{y2} = \omega_{xH} - \omega_{yH} \qquad x, y = \{1,2,3,H\} \tag{4.5}$$

(a) ***(b)***

Particularizând relaţia (4.5) se pot determina ***vitezele unghiulare*** ale oricărui element constructiv *x* al transmisiei faţă de elementul bază (roata centrală *2,* respectiv elementul suport axe *H*):

– pentru *transmisia planetară simplă monomobilă*: *y* = *H*

$$\omega_{xH} = \omega_{x2} - \omega_{H2} \tag{4.6}$$

– pentru *transmisia cu roţi dinţate cu axe fixe*: *y* = *2*

$$\omega_{x2} = \omega_{xH} - \omega_{2H} \tag{4.7}$$

Raportul de transmitere al unităţii planetare monomobile poate fi determinat, conform definiţiei (relaţia 4.4), pentru două cazuri distincte de element conducător:

– elementul central (roata) *1*:

$$i_{1H}^{2} = \frac{\omega_{12}}{\omega_{H2}} = \frac{\omega_{1H} - \omega_{2H}}{-\omega_{2H}} = 1 - \frac{\omega_{1H}}{\omega_{2H}} = 1 - i_{12}^{H} \tag{4.8}$$

– elementul suport axe *H*:

$$i_{H1}^{2\equiv 0} = i_{H1}^{2} = \frac{\omega_{H2}}{\omega_{12}} = \frac{1}{\omega_{12}/\omega_{H2}} = \frac{1}{i_{1H}^{2}} \tag{4.9}$$

Folosind raportul de transmitere al transmisiei cu roţi dinţate cu axe fixe calculat cu relaţia:

$$i_0 = i_{12}^{H\equiv 0} = \frac{\omega_{1H}}{\omega_{2H}} = \left(-\frac{z_3}{z_1}\right)\cdot\frac{z_2}{z_3} = -\frac{z_2}{z_1} \tag{4.10}$$

în care: numerele de dinţi z_1, z_2 şi z_3 se aleg din considerente cinematice şi de rezistenţă, rezultand rapoartele de transmitere între elementele mobile ale transmisiei planetare monomobile:

$$i_{1H}^{2} = 1 - i_0\,; \qquad i_{H1}^{2} = \frac{1}{1-i_0} \tag{4.11}$$

Relaţiile (4.11) reprezintă formulele lui Willis, cunoscute din Teoria mecanismelor, în care i_0 este *raportul cinematic interior*.

4.3.2. Cinematica transmisiei planetare simplă diferenţială

Deoarece gradul de mobilitate este $M = 2$, se impune cunoaşterea mişcărilor a doi arbori exteriori, astfel că legea de transmitere este o funcţie de forma:

$$\varphi_c = f(\varphi_a, \varphi_b) \tag{4.12}$$

în care: φ_c – unghiul de rotaţie necunoscut al arborelui c;

φ_a, φ_b – unghiurile de rotaţie cunoscute ale arborilor a şi b.

Derivând relaţia (4.12) în raport cu timpul, se poate deduce viteza unghiulară a arborelui interior c funcţie de vitezele unghiulare ale arborilor de intrare:

$$\omega_c = \frac{\partial f}{\partial \varphi_a} \cdot \omega_a + \frac{\partial f}{\partial \varphi_b} \cdot \omega_b = A \cdot \omega_a + B \cdot \omega_b \tag{4.13}$$

Constantele A şi B pot fi determinate din condiţiile fixării arborilor *b,* respectiv *a* astfel:

$$\text{– pentru } \omega_b = 0: \ A = \left(\frac{\omega_c}{\omega_a}\right)_{b\equiv 0} = i_{ca}^{b} \tag{4.14a}$$

$$\text{– pentru } \omega_a = 0: \ B = \left(\frac{\omega_c}{\omega_b}\right)_{a\equiv 0} = i_{cb}^{a} \tag{4.14b}$$

Cele două rapoarte de transmitere din relaţiile anterioare corespund transmisiei planetare monomobile obţinută din transmisia diferenţială prin fixarea succesivă la elementul bază a celor doi arbori exteriori cu mişcări cunoscute. Astfel se stabileşte legătura între vitezele unghiulare sub forma:

$$\omega_c = i_{ca}^{b} \cdot \omega_a + i_{cb}^{a} \cdot \omega_b \tag{4.15}$$

Observaţie:

Pentru schema structurală a transmisiei planetare din figura 4.2 a, folosind notaţiile: $c = 1$, $b = 2$, $a = H$, ***legea de transmitere*** are expresia:

$$\omega_1 = i_{1H}^{2} \cdot \omega_H + i_{12}^{H} \cdot \omega_2 = (1 - i_0) \cdot \omega_H + i_0 \cdot \omega_2 \tag{4.16}$$

4.4. Dinamica transmisiilor planetare

Un aspect dinamic important al transmisiilor planetare îl constituie ***circulaţia de putere*** care reprezintă distribuţia puterii de intrare pe ramurile transmisiei împreună cu sensul de transmitere, dat de sensul vitezelor unghiulare ale arborilor.

Teoretic, considerând randamentul transmisiei 100% dacă se neglijează frecările între elementele constructive, se defineşte *circulaţia teoretică de putere*. Pentru cazul real de funcţionare al unei transmisii planetare (randament mai mic decât 100%), când se iau în considerare şi fenomenele de frecare ce lasă nemodificată cinematica (vitezele unghiulare ale arborilor componenţi fiind determinate ca mărime şi sens din analiza cinematică), se defineşte *circulaţia reală de putere*, când se modifică numai momentele şi forţele care încarcă elementele constructive ale transmisiei. Acestea reprezintă încărcările reale ale elementelor unei transmisii planetare şi se obţin din rezolvarea sistemului format din ecuaţiile de echilibru dinamic pentru fiecare unitate planetară.

La transmisiile planetare simple (monomobile) cu doi arbori exteriori, la care puterea circulă neramificat de la intrare la ieşire şi într-un singur sens, nu se efectuează analiza circulaţiei de putere. Necesitatea acestei analize apare numai *la transmisiile planetare complexe* când se deosebesc următoarele situaţii:

– *circulaţia de putere în circuit deschis*: pe fiecare ramură de la intrare la ieţire;

– *circulaţia de putere în circuit închis*: când există una sau mai multe ramuri (nu toate) în care puterea circulă de la ieşire către intrare; apare supraîncărcarea unor ramuri ceea ce constituie un dezavantaj dinamic.

Circulaţia teoretică a puterii într-o transmisie planetară este caracterizată prin determinarea, pe fiecare ramură şi/sau element constructiv x, a coeficientului de repartiţie teoretică a puterii de forma:

$$\lambda_x = \frac{P_x}{P_1} = \frac{T_x \cdot \omega_x}{T_1 \cdot \omega_1} \tag{4.17}$$

în care: P_1, P_x – puterea de intrare, respectiv puterea care circulă pe ramura (elementul) x;

T_1, T_x – momentul de torsiune transmis la intrare, respectiv de elementul x;

ω_1, ω_x – viteza unghiulară a elementului de intrare, respectiv x.

Deoarece o transmisie planetară complexă este formată din mai multe unităţi planetare *j*, definirea circulaţiei teoretice a puterii se face prin stabilirea coeficientilor λ_{xj} corespunzători anumitor elemente centrale ale unităţilor planetare componente $X = \{1,2,H\}$.

Dinamica transmisiilor planetare complexe se studiază prin descompunerea acestora în unităţi planetare simple. În studiul dinamic, neglijnd forţele de inerţie, o transmisie (unitate) planetară simplă poate fi analizată, inversând mişcarea în raport cu elementul suport-axe *H*, ca o transmisie cu roţi dinţate cu axe fixe.

Pentru determinarea coeficienţilor de repartiţie a puterii pe elementele centrale ale unei unităţi planetare, se consideră schema bloc a unei transmisii planetare complexe din figura 4.17, în care s–au folosit notaţiile: *1* – element de intrare (conducător), *n* – element de ieşire (condus), *j* – transmisie (unitate) planetară diferenţială simplă formată din roţile centrale *k*, *l* şi elementul suport–axe H_j .

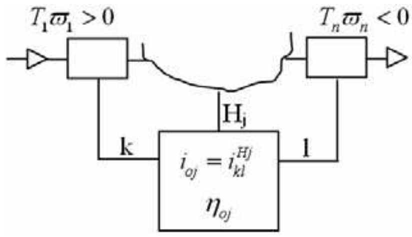


***Fig. 4.17** Circulaţia de putere pentru transmisia planetară complexă*

Convenţional, un element constructiv *k* al unei transmisii planetare poate fi definit ca element conducător sau condus (figura 4.18) prin produsul dintre momentul static T_k şi viteza unghiulară absolută ω_k astfel:

$$T_k \cdot \omega_k > 0 \Rightarrow k = \text{element conducător;}$$

$$T_k \cdot \omega_k < 0 \Rightarrow k = \text{element condus} \qquad (4.18)$$



***Fig. 4.18** Definirea elementelor conducător şi condus*

În cazul general, coeficienţii de repartiţie teoretică a puterii pe elementele centrale k, l şi H_j au următoarele expresii analitice:

$$\lambda_k = \frac{P_k}{P_1} = \frac{T_k \cdot \omega_k}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{1}{1 - i_{H_j k}} \cdot \frac{i_{0j}}{i_{1n}} \cdot \frac{\partial i_{1n}}{\partial i_{0j}}$$

$$\lambda_l = \frac{P_l}{P_1} = \frac{T_l \cdot \omega_l}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{1}{i_{H_j l} - 1} \cdot \frac{i_{0j}}{i_{1n}} \cdot \frac{\partial i_{1n}}{\partial i_{0j}} \qquad (4.19)$$

$$\lambda_{H_j} = \frac{P_{H_j}}{P_1} = \frac{T_{H_j} \cdot \omega_{H_j}}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{1 - i_{0j}}{1 - i_{kH_j}} \cdot \frac{i_{0j}}{i_{1n}} \cdot \frac{\partial i_{1n}}{\partial i_{0j}}$$

unde: P_{k,l,H_j} – puterea care circulă prin roţile centrale k, l, respectiv elementul suport-axe H_j;

T_{k,l,H_j} – momentele de torsiune transmise de arborii pe care sunt fixate roţile centrale k, l, respectiv elementul H_j;

ω_{k,l,H_j} – vitezele unghiulare ale roţilor centrale k, l, respectiv elementul suport-axe H_j;

i_{0j} – raportul de transmitere interior al unitatii planetare j;

i_{1n} – raportul de transmitere al transmisiei complexe considerate;

$i_{H_j k}, i_{H_j l}$ – raportul de transmitere dintre elementul suport-axe H_j şi rotile centrale k , respectiv l.

Relaţiile (4.19) fac posibilă analiza dinamică (teoretică) a oricărei transmisii planetare monomobile, constatând că circulaţia teoretică de putere este complet determinată de cinematica acesteia ($i_{1n} = i(i_{0j})$ şi i_{0j}; $j = 1,2,...$

Ţinând seama că: $P_1 = T_1 \cdot \omega_1 > 0$ este putere de intrare, rezultă că în raport cu unitatea planetară j elementul $k \in \{k, l, H_j\}$ este conducător dacă $\lambda_x > 0$ şi este condus dacă $\lambda_x < 0$.

În cazul real, când se iau în considerare pierderile prin frecare din cuplele superioare şi se neglijează frecarea din cuplele inferioare de rotaţie ale transmisiilor planetare, iar efectul forţelor şi momentelor de inerţie acţionează numai în cuplele inferioare, puterea pe o ramură (element) oarecare x a(l) unei transmisii planetare poate fi descrisă,

comparativ cu circulaţia teoretică, de aceeaşi viteză unghiulară şi de un moment de torsiune în general mai mic ca valoare ($T_{\mu} < T_{\mu=0}$).

Circulaţia reală de putere pe ramura (elementul) *x* poate fi descrisă, similar cu cazul teoretic, cu ajutorul coeficientului real de repartiţie a puterii:

$$\beta_x = \frac{P_x}{P_1} = \frac{T_x \cdot \omega_x}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{T_x}{T_1} \cdot \frac{1}{i_{1x}} \tag{4.20}$$

în care: i_{1x} – raportul cinematic de transmitere de la elementul de intrare *1* la elementul *x*. Deoarece rapoartele cinematice de transmitere se pot obţine din analiza cinematică, din relaţia (4.20) rezultă că circulaţia reală de putere se reduce la stabilirea momentelor de încarcare T_x ale elementelor centrale în funcţie de momentul T_1 la intrarea în transmisia planetară.

Datorita piederilor prin frecare, se defineşte ***randamentul*** unei transmisii planetare ca raportul dintre puterea de ieşire (puterea utilă) şi cea de intrare (puterea consumată):

$$\eta = \frac{P_n}{P_1} = \frac{-T_n \cdot \omega_n}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{-T_n / T_1}{\omega_1 / \omega_n} = \frac{\overline{i_{1n}}}{i_{1n}} \tag{4.21}$$

în care: i_{1n} – raportul cinematic de transmitere;

$\overline{i_{1n}}$ – raportul de transmitere al momentelor, care are aceeaşi funcţie ca şi raportul cinematic, dar se deosebeşte de acesta prin faptul că argumentul constituit din raportul cinematic interior i_{0j} al unităţii planetare *j* este înlocuit cu raportul interior al momentelor $\overline{i_{0j}}$ astfel:

$$\begin{aligned} \overline{i_{1n}} &= i_{1n}(\overline{i_{0j}}) \\ \overline{i_{0j}} &= i_{0j} \cdot \eta_{0j}^{x_j} \end{aligned} \tag{4.22}$$

unde: *j* – numărul de ordine al unităţii planetare din componenţa transmisiei considerate;

η_{0j} – randamentul interior al unităţii planetare *j*;

$x_j = \pm 1$ dacă roata centrală *k* este element conducător, respectiv condus în transmisia cu axe fixe asociată, prin inversarea mişcării, unităţii planetare.

Determinarea momentelor reale care încarcă elementele constructive *ale transmisiilor planetare simple monomobile* se face prin

rezolvarea sistemului format din ecuaţiile de echilibru dinamic al fiecarei unităţi planetare *j* (vezi figura 4.17). Deoarece momentele statice sunt invariante faţă de inversarea mişcării, stabilirea momentelor reale ale unei transmisii planetare poate fi redusă la calculul momentelor de încărcare ale elementelor transmisiei cu axe fixe asociată impunând cele două condiţii.

Din condiţia de echilibru a puterilor:

$$\sum P_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{0j} = \frac{P_l}{P_k} = \frac{-T_l \cdot \omega_l}{T_k \cdot \omega_k} = \frac{-T_l / T_k}{\omega_k / \omega_l} = \frac{-T_l / T_k}{i_{0j}} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{T_l}{T_k} = i_{0j} \cdot \eta_{0j} = \overline{i_{0j}} \tag{4.23}$$

rezultă momentul de torsiune transmis de roata centrală *l* funcţie de momentul de intrare în unitatea planetară (pe roata centrală *k*) dat de relaţia:

$$T_l = -\overline{i_{0j}} \cdot T_k \tag{4.24}$$

Din condiţia de echilibru a momentelor de torsiune:

$$\sum T_j = 0 \quad \Rightarrow \quad T_k + T_l + T_{H_j} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T_{H_j} = -(T_k + T_l) = (\overline{i_{0j}} - 1) \cdot T_k \tag{4.25}$$

rezultă momentul transmis de elementul suport–axe H_j.

Dacă nu există pierderi de putere de la elementul de intrare *1* al transmisiei planetare complexe la elementul *k* al unităţii planetare *j*, în calcule se consideră: $T_k = T_1$.

Comparând relaţiile (4.24) şi (4.25) cu ecuaţia cinematică (4.16) a unităţii planetare *j*, scrisă cu noile notaţii, sub forma:

$$\omega_k = (1 - i_{0j}) \cdot \omega_{H_j} + i_{0j} \cdot \omega_l \tag{4.26}$$

se constată că expresiile momentelor T_l, T_{H_j} pot fi obţinute direct din coeficienţii vitezelor unghiulare ω_l, respectiv ω_{H_j} prin schimbarea semnului şi înlocuirea raportului de transmitere cinematic i_{0j} cu raportul momentelor $\overline{i_{0j}}$.

În mod asemănător se poate stabili ***încărcarea arborilor*** (elementelor) *unei transmisii planetare simple diferenţiale.*

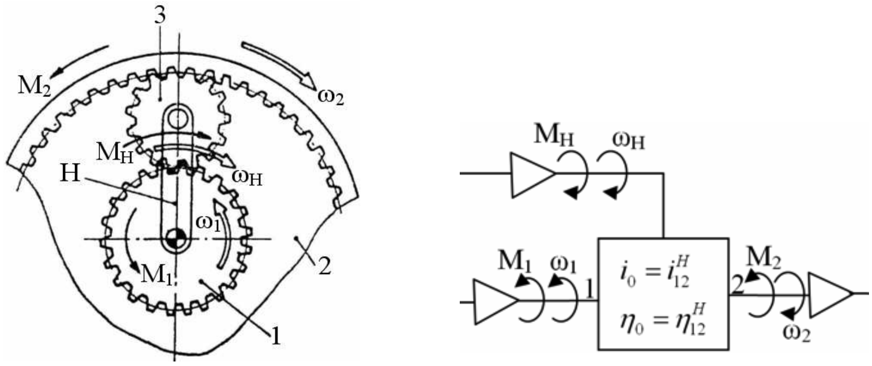


Fig. 4.19 *Încărcarea transmisiei planetare simple diferenţiale*

4.5. Particularităţi de calcul organologic al transmisiilor planetare

Angrenajele unei transmisii planetare se proiectează pentru fiecare unitate planetară în parte; practic dimensionarea şi verificarea se realizează din condiţii de rezistenţă pentru transmisia cu roţi dinţate cu axe fixe asociată prin inversarea mişcării. Particularităţile de calcul sunt legate de următoarele *aspecte*:

1) În relaţiile utilizate pentru dimensionarea elementelor constructive ale unei transmisii planetare (roţi centrale, sateliţi, braţ port–satelit, arbori) se folosesc valorile momentelor de torsiune care încarcă fiecare element şi nu puterile, pentru a face distincţie între puterile arborilor unei unităţi planetare şi puterile arborilor transmisiei cu axe fixe asociată.

2) Momentele de torsiune care încarcă arborii transmisiei cu axe fixe sunt egale cu momentele corespunzătoare pe arborii unităţii planetare.

3) În cazul unităţilor planetare cu *S* sateliţi legaţi în paralel, forţele din angrenaje se calculează ţinând seama şi de procedeul utilizat pentru uniformizarea încărcării sateliţilor, momentul de calcul determinându-se cu relaţia:

$$T_{xc} = \frac{T_x}{S} \cdot K \tag{4.27}$$

în care: T_x – momentul de torsiune total care solicită elementul (roata centrală) *x*;

K – coeficient care ţine seama de neuniformitatea încărcării sateliţilor, indicat în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1 *Coeficient de neuniformitate*

Coeficientul *K*		Tipul de uniformizare a încărcării sateliţilor
Încovoiere	**Contact**	
1		Eliminarea totală a nedeterminării
1,15	1,1	Ridicarea nedeterminării în plan pentru S=3
1 – 2,3	1 – 1,6	Compensarea prin deformaţii elastice şi montaj flotant (clasa de precizie VII)
1 – 1.8	1 – 1,4	Idem, clasa de precizie VI
1 – 3	1 – 2,3	Nu se utilizează soluţii de egalizare a încărcării
1–2,2	1 – 1,8	Idem, reducerea nedeterminării statice se realizează prin creşterea preciziei de execuţie (clasa a VI –a)

4) Determinarea clasei de precizie, a coeficientului dinamic şi a tipului de ulei necesar ungerii se face în funcţie de viteza periferică a roţilor calculată pentru transmisia cu axe fixe asociată prin inversarea mişcării unităţii planetare care se proiectează.

5) Forţele centrifuge ale sateliţilor, calculate cu viteza unghiulară a elementului suport-axe $\omega_{H\,j}$, se iau în considerare în calculul lagărelor (rulmenţilor) sateliţilor.